LXXIX.

SU ALCUNI INDIRIZZI NELLE INVESTIGAZIONI GEOMETRICHE

OSSERVAZIONI DIRETTE AI MIEI STUDENTI [*] (1).

« Rivista di matematica », I, 1891, pp. 42-66.

I.

Lo CHASLES alla fine del suo *Aperçu historique* scriveva le seguenti parole:

« Dans la Géométrie ancienne les vérités étaient isolées; de nouvelles étaient difficiles à imaginer, à créer; et ne devenait pas géomètre inventeur qui voulait.

« Aujourd'hui chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque connue, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations; de sorte qu'on pourra multiplier, presque à l'infini, le nombre des vérités nouvelles déduites de la première: toutes, il est vrai, ne

---

[*] Il presente lavoro è stato tradotto in inglese, col titolo: *On some tendencies in geometric investigations,* nel Bull. amer. math. Soc., (2) 10, 1904, pp. 442-468 [N. d. R.].

(1) Aderendo alle gentili insistenze del Direttore di questa *Rivista* espongo qui, riunite e con alcune aggiunte, delle considerazioni che, staccatamente, ebbi già occasione di fare in iscuola a giovani laureandi in matematiche, e che mirano specialmente a mettere in guardia coloro i quali vogliono darsi alle ricerche scientifiche da certi difetti od errori in cui facilmente cadono i giovani, ed in particolare i giovani geometri. Tali considerazioni non sembrano inopportune ora che in Italia i giovani che si occupano di geometria sono assai numerosi. Ma per la loro natura e pel loro scopo *esse non possono presentare interesse o novità che per gli esordienti: solo per questi può riuscire non inutile il presente scritto.*

mériteront pas de voir le jour, mais un certain nombre d'entre elles pourront offrir de l'intérêt et conduire même à quelque chose de très-général.

« Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en Géométrie; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice. »

Mezzo secolo è trascorso, ed in questo periodo la geometria ha fatto progressi immensi (2). Allo studio projettivo delle curve e superficie algebriche dei primi ordini è seguita la teoria generale delle curve e superficie di qualunque ordine; coll'estensione del concetto di *elemento* geometrico si è fatta quella delle *varietà algebriche* e degli *spazi* in cui queste si considerano. Nuove specie di problemi si sono presentate. E le trasformazioni projettive a cui principalmente alludeva lo CHASLES si sono generalizzate con la nozione infinitamente più vasta delle *trasformazioni algebriche.*

Cresciute così a dismisura le ricerche geometriche e con esse i mezzi di trasformazione, crebbe in conseguenza proporzionalmente la facilità di cui parlava il grande geometra francese di moltiplicare senza fine le proposizioni nuove, di generalizzare e creare in geometria. E questa facilità, che, almeno in apparenza, è maggiore in questa scienza che non nell'analisi, nella fisica matematica, ecc., induce molti giovani, specialmente in Italia, a dare alla geometria la preferenza sugli altri rami delle matematiche, alcuni dei quali sono veramente negletti (ed è un gran male) dalla gioventù nostra.

Ma la facilità è una cattiva consigliera; e spesso i lavori a cui essa guida i giovani, se possono servire come esercizi, come preparazioni a ricerche originali, non meriterebbero però di veder la luce. Nella innumerevole copia di pubblicazioni scientifiche non sono rari i lavori geometrici in cui si cerca invano un'idea un po' nuova, un risultato che tosto o tardi possa servire, qualche cosa insomma che sia destinato a rimanere nella scienza; e si trovano invece trattate delle questioncelle o studiati degli enti speciali che non hanno alcuna utilità, alcuna importanza, che la loro origine derivano non dalla scienza stessa ma dal puro capriccio dell'autore; ovvero si trovano applicazioni già fatte migliaia di volte di noti metodi; o generalizzazioni di cose note così facili a farsi che basta la cono-

(2) Per farsi un'idea, anche solo approssimativa, della copia di ricerche che si son fatte in questo periodo, il giovane non ha che da dare uno sguardo alla Monografia storica del LORIA: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (Mem. Acc. Torino, (2) 38).

scenza di queste per darle subito; ecc. ecc. Ora siffatti lavori non solo riescono inutili per la scienza, ma le sono a dirittura dannosi, poichè producono in essa un vero ingombro, un disturbo pei ricercatori più seri; e sciupano qualche volta degli argomenti che pur potevano meritare di essere studiati. Meglio, molto meglio, che il giovane, anzi che produrre rapidamente una lunga serie di scritti di tal natura, si affatichi per molto tempo nella risoluzione anche di un sol problema, purchè questo sia importante: meglio un risultato atto a rimanere nella scienza che mille destinati a morire appena nati! (3).

II.

Ma quand'è che una questione è *importante* e merita di formare oggetto di studio?

Non si può dare una risposta precisa a questa domanda. L'importanza di un argomento è molto relativa; è giudicata in vario modo dai vari uomini, e muta coi tempi e colle circostanze. È accaduto spesso di attribuire molta importanza ad un problema solo per le difficoltà che esso ha presentato; ed in fatti quando per ottenerne la soluzione si son dovuti escogitare nuovi mezzi, notevoli artifizi, ecc., la scienza avrà guadagnato, forse più con questi che col risultato finale. In generale si può dire che sono importanti tutte le ricerche relative ad enti che abbiano essi stessi importanza; quelle che hanno un gran carattere di generalità, o che riuniscono molte cose apparentemente distinte sotto un sol punto di vista, semplificando od illuminando; quelle che conducono a risultati da cui si prevede che scaturiranno numerose conseguenze; ecc. ecc.

Lo studio dei grandi scienziati è forse il miglior suggerimento che si possa dare al giovane che vuol imparare a giudicare dell'importanza degli argomenti. Poichè appunto nella scelta di questi i

(3) A giovani che aspirano alla laurea in matematiche si può ben dire schiettamente che la scienza non va considerata come una professione in cui tutti possano riescire: chè se è vero che per dare ad essa risultati utili non è più necessario il genio, pure un certo ingegno adatto alla sua natura ci vuole, e chi sa di non averlo deve, anche per quella venerazione e per quell'abnegazione che appunto la scienza esige, rinunziare alle ricerche scientifiche. Perchè un giovane, che potrebbe forse insegnare ottimamente le matematiche elementari e studiare a fondo le numerose ed importanti questioni didattiche che in quell'insegnamento si presentano, dovrà trascurare tali studi, per fare invece delle ricerche di matematiche superiori che non sono adatte al suo ingegno?

grandi ingegni son sempre stati maestri; ed anche quando si sono occupati di questioni molto particolari hanno mostrato bene in qual modo queste possano pure riuscire importanti. E qui anche a conferma di cose dette precedentemente, riporterò ancora le parole del BELTRAMI [4]: « Imparino i giovani ad educarsi di buon'ora sui capolavori dei grandi maestri, anzichè isterilire l'ingegno in perpetue esercitazioni da scuola che a nulla approdano, fuorchè a creare una nuova Arcadia, ove l'indolenza è velata sotto le forme dell'operosità... Coi forti studi sui grandi modelli si son fatti in ogni tempo i valenti; e con essi dee farsi la nostra nuova generazione scientifica, se vuol esser degna dei tempi a cui nacque e delle lotte a cui è destinata ».

In tali studi si deve tener presente questo altro criterio: *di allargare quanto si può la propria coltura.* Chi non si occupa di altri lavori che di quelli relativi al campicello che egli coltiva finisce col dare troppo peso a questioni che non montano affatto a chi, avendo maggiori cognizioni, considera le cose più dall'alto. Acquistare un punto di vista elevato rispetto a tutta la scienza: questo deve fare il giovane con un largo studio dei migliori lavori di ogni ramo di questa.

III.

In una lettera di JACOBI a LEGENDRE (2 luglio 1830) a proposito di un rapporto di POISSON sui *Fundamenta nova* è detto:

« ... M. POISSON n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de feu M. FOURIER, où ce dernier nous fait des reproches, à ABEL et à moi, de ne pas nous être occupés de préférence du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. FOURIER avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde ... ».

Nessun dubbio si deve avere intorno a questo concetto di JACOBI: *alla scienza convien lasciare assolutamente la massima libertà;* e in particolare non si può punto imporle l'obbligo di tener sempre di mira le applicazioni pratiche.

---

(4) Giornale di matem., 11, p. 153.

Però nelle condizioni attuali delle ricerche matematiche in Italia, ora che fra i giovani matematici son pochissimi quelli che si occupano di meccanica, di fisica matematica, ecc., è opportuno ricordare le seguenti parole, pure giustissime, che appunto il FOURIER scriveva otto anni prima del Discorso preliminare della *Théorie analytique de la chaleur*:

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue: elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même, et d'en découvrir les éléments qu'il nous importe le plus de connaître, et que cette science doit toujours conserver: ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels ».

È forse necessario citare esempi a conferma di ciò? ricordare come la maggior parte delle questioni matematiche, dalle più semplici alle più elevate, abbiano tratta la loro origine dalle applicazioni alla natura? come la teoria delle equazioni differenziali ordinarie, quella delle equazioni alle derivate parziali, le serie trigonometriche, varie nuove classi di funzioni che poi dovevano riuscire importantissime per l'Analisi, tutte sian sorte od abbiano ricevuto continui eccitamenti dalla Fisica matematica o dalla Meccanica celeste? come la teoria del potenziale (e quindi l'elettrodinamica ecc.) si sia collegata in modo meraviglioso, specialmente per opera di RIEMANN (il degno successore di GAUSS e di DIRICHLET!) e dei suoi continuatori, alla teoria delle funzioni di una variabile complessa, ed in particolare delle funzioni algebriche e dei loro integrali, sì che uno di quelli, il KLEIN (5), potè ricorrere ad esperienze elettriche per mostrare l'esistenza dei vari integrali abeliani? O si deve ricordare quante volte allo studio delle coniche e delle quadriche si fu condotti da quello dei fenomeni naturali; o come il sistema nullo, ed il complesso e la congruenza lineare di rette ecc., si sian presentati nella meccanica dei corpi solidi, la quale poi dalla geometria della retta doveva ricevere in cambio (grazie specialmente a PLÜCKER, KLEIN e BALL (6)) aiuti straordinari? Dare un'idea, ancorchè

(5) *Ueber* RIEMANN'*s Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale,* Leipzig, 1882.

(6) *The Theory of Screws,* Dublin, 1876. V. anche la recente opera del GRAVELIUS: *Theoretische Mechanik starrer Systeme, auf Grund der Methoden und Arbeiten* BALL'*s,* Berlin, 1889.

pallida, dei modi svariatissimi con cui i problemi della natura hanno spinto le matematiche a progredire, sarebbe impossibile: come impossibile sarebbe l'enumerare tutti quei grandi (e ve ne sono tuttora sulla breccia) che han saputo collegare fra loro le più elevate ricerche di matematica pura colle applicazioni di questa alla fisica, all'astronomia, all'ingegneria, ecc.

I giovani che vogliono darsi alle ricerche scientifiche devono tener presenti quei fatti e questi esempi, e studiare le pure teorie in pari tempo colle loro applicazioni. E fra i tanti vantaggi che essi ne trarranno, vi sarà pur questo, che quando a loro mancasse ogni altro criterio per giudicare dell'importanza di un problema teorico da trattare, sempre rimarrà quello che è fornito dalle possibili applicazioni del problema stesso (le quali se, come già dicemmo, non son necessarie, certo però son sufficienti per giustificare una ricerca scientifica).

IV.

Ciò che s'è detto intorno alle relazioni fra le matematiche pure e quelle applicate va ripetuto in grado molto più elevato per le due principali suddivisioni delle matematiche pure: l'analisi e la geometria. Il metodo delle coordinate serve a passare dall'una all'altra e le collega intimamente, anzi le fonde insieme per modo che si può dire che ogni progresso dell'una produce un progresso dell'altra, e viceversa. Tutta la geometria differenziale sta a prova di ciò, ed in particolare le molteplici relazioni che essa stabilisce fra le equazioni differenziali e le curve, le superficie, i *connessi* introdotti dal CLEBSCH (7), ecc. E la teoria dei gruppi infiniti e continui di trasformazioni svolta in questi ultimi tempi dal LIE non ha solo prestato grandi servizi alla dottrina delle equazioni differenziali, ma ha altresì risolto notevoli problemi geometrici, illuminando ad esempio di nuova luce quello dei fondamenti della geometria (8). La geometria degli enti *algebrici* coincide, come mostra la stessa denomina-

---

(7) A proposito delle ricerche di questo grande geometra su quegli enti i suoi biografi osservano (Math. Ann., VII, p. 50): « Er hat mit ihnen dem Grundzuge seiner mathematischen Denkweise noch einmal Ausdruck gegeben, welche *die Mathematik nicht als eine Reihe geschiedener, einander fremder Disciplinen, sondern als einen lebendigen Organismus* erfassen wollte. »

(8) V. POINCARÉ, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* (Bull. Soc. math. de France, XV, 1887); e specialmente LIE, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (Berichte der k. sächs. Ges. d. W., Leipzig, 1890).

zione e la definizione di questi enti (9), coll'analisi delle funzioni algebriche e delle funzioni trascendenti affini a queste: così la geometria projettiva equivale alla moderna algebra delle trasformazioni lineari (delle forme invariantive), ecc. E la teoria delle equazioni algebriche e dei gruppi di sostituzioni illumina vari importanti problemi di geometria e ne trae essa stessa utili rappresentazioni e suggerimenti (10). Ecc. ecc. (11).

Questa multiplicità di legami fra l'analisi e la geometria e la necessità che ne consegue di studiarle entrambe e di non limitarsi ad uno solo dei due indirizzi, analitico e sintetico, è sempre stata riconosciuta dai grandi matematici. Su essa ad esempio insistevano in pari tempo LAGRANGE e MONGE nelle loro lezioni analitiche e geometriche alla Scuola normale (1795); e quest'ultimo nella sua *Géométrie descriptive* scriveva le seguenti parole, che evidentemente si possono applicare a tutta quanta la geometria:

«... Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la Géométrie descriptive à l'Algèbre; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en Analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues (12), chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie.

« *Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble*: la Géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées, l'évidence qui est son caractère; et, à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre ».

Ed in tempi molto più prossimi a noi il CLEBSCH intorno a quei due indirizzi scriveva (13):

---

(9) Una varietà si dice *algebrica* quando i suoi elementi sono tutti quelli aventi le coordinate espresse da funzioni algebriche date di uno o più parametri variabili indipendenti. Sotto questa definizione si può far rientrare anche la nozione di corrispondenze algebriche.

(10) V. ad esempio il Cap.° sulle applicazioni geometriche nel *Traité des substitutions et des équations algébriques* del JORDAN.

(11) Si confronti anche il Programma del KLEIN: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,* Erlangen, 1872 (tradotto in italiano dal sig. FANO nel vol. XVII, serie 2ª, degli Annali di matematica).

(12) Questa restrizione può esser tolta mediante l'uso di varietà n volte estese. Su queste ritornerò nel seguito.

(13) *Zum Gedächtniss an* JULIUS PLÜCKER (Abhandl. der k. Ges. d. W. zu Göttingen, 16, 1871); tradotto in italiano dal Prof. BELTRAMI nel volume XI del Giornale di matematiche. Si confronti questo brano con quello della biografia di CLEBSCH citato in una nota precedente.

« *Beide zusammen umfassen erst in Verein und Ergänzung das Ganze mathematischer Forschung, und es vermag keine von beiden auf die Dauer ohne schwere Schädigung ihres eigensten Wesens die Begleitung und den Einfluss der andern zu entbehren* ».

E gli stessi concetti propugna nelle sue lezioni ed illustra col proprio esempio uno dei più valenti maestri che ora vanti la Germania, il KLEIN; sì che tutta la scuola che da lui deriva dimostra nel miglior modo di possedere in pari tempo le cognizioni e gli strumenti analitici e quelli geometrici.

In Italia purtroppo la cosa è ben diversa: la separazione delle matematiche pure in Analisi e Geometria è fatta dai giovani in modo così netto (14) che di ben pochi fra essi si può dire che vadano studiando e coltivando l'una e l'altra. Vi sono dei giovani analisti e dei giovani geometri; ma dei giovani che considerino la matematica tutta come il loro campo, seguendo i grandi esempi che noi pure abbiamo, ve ne son pochissimi. Ond'è che nel rivolgermi ai miei studenti di Geometria io sento il dover di raccomandar loro col massimo calore lo studio dell'Analisi. Un giovane che voglia oggidì coltivare la Geometria staccandola nettamente dall'Analisi, non tenendo conto dei progressi che questa ha fatto e va facendo, quel giovane, dico, per quanto grande abbia l'ingegno, non sarà mai un geometra completo (15). Egli non possiederà quei potenti strumenti di ricerca che alla moderna geometria fornisce l'analisi moderna. Egli ignorerà vari risultati geometrici che si trovano, magari implicitamente, negli scritti degli analisti. E non solo non potrà valersene nelle sue proprie ricerche; ma gli accadrà di faticare per ritrovarli egli stesso, e, caso molto frequente, di presentarli poi come nuovi quando sia riuscito a ritrovarli.

Dopo le citazioni già fatte sembra inutile l'addurre nuovi esempi in appoggio di questi concetti. Ma uno ve n'è ancora che mi piace citare, perchè istruttivo in sommo grado: *la geometria su una curva algebrica*. Il concetto di questa geometria, cioè di proprietà dell'ente algebrico invariabili per trasformazioni razionali dell'ente stesso, si trova per la prima volta in un lavoro analitico: nella grande Memoria di RIEMANN sulla *Teoria delle funzioni Abeliane*. È qui che viene usata la prima volta la nozione del *genere* (contenuta solo implicitamente nella Memoria capitale di ABEL sulle sue trascendenti)

(14) Bisogna confessare che essi la vedono già fatta in tal modo nell'elenco delle materie che s'insegnano nelle Università: son messe in opposizione la *geometria projettiva* e la *geometria analitica*! *l'analisi superiore* e la *geometria superiore*!

(15) Si pensi che « *geometra* » nel senso più largo della parola è sinonimo di « *matematico* »!

e dimostrata l'invariabilità di esso per tali trasformazioni. È qui che si trova quella rappresentazione di una funzione algebrica come somma d'integrali abeliani di 2ª specie, che (grazie anche al ROCH che completò il calcolo di RIEMANN) ha dato uno dei più importanti e fecondi teoremi alla geometria moderna. È qui infine che si trovano tante proposizioni notevoli, alcune delle quali, messe sotto veste geometrica, possono ancora sembrar nuove ai giovani geometri che non abbiano ben meditato su quel profondo immortale lavoro. E nuovi risultati per la geometria sulla curva si son trovati nelle Lezioni di WEIERSTRASS, sulle funzioni abeliane. E per tutta quanta la geometria delle curve algebriche le ricerche analitiche sulle funzioni algebriche e sui loro integrali hanno avuto applicazioni importantissime: basti ricordare in proposito il teorema di ABEL (« il ponte naturale, come fu chiamato, fra il lato algebrico e quello trascendente della detta teoria ») ed il problema d'inversione che ad esso si collega, e le applicazioni geometriche che il CLEBSCH insegnò a fare di entrambi. Nè l'influenza di RIEMANN sulle applicazioni dell'analisi alla geometria s'è limitata a ciò. È da essa che in grado diverso si possono considerare come derivate varie nuove classi di trascendenti che ora si vanno costruendo e studiando accanto a quelle abeliane. E così il POINCARÉ diede le espressioni di certe funzioni analitiche uniformi di una variabile, che egli chiamò *funzioni Fuchsiane*, mediante le quali mostrò ad esprimere le coordinate dei punti di una curva algebrica qualunque. E di questa rappresentazione si son già fatte applicazioni allo studio della curva (16); ma converrebbe ricercare se non se ne possano fare ancora delle altre. Quelle funzioni rientrano nel concetto generale delle funzioni *linearmente automorfe,* come le chiama il KLEIN, cioè delle funzioni di una variabile che non mutano valore per un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni lineari di questa (17). Varrebbe la pena che i giovani geometri penetrassero nel vasto campo che queste, ed altre funzioni, sì di una che di più variabili, che ogni giorno si vanno introducendo, aprono agli studi: poichè è certo che, quando pure essi volessero sempre limitarsi a scopi geometrici, le cognizioni analitiche che così acquisterebbero verrebbero ad essere per loro della massima utilità, e forse a dar la chiave per la risoluzione di problemi geometrici difficilissimi.

---

(16) V. ad esempio: HUMBERT, *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques* (Journal de math., 1886).

(17) V., accanto ai lavori speciali del POINCARÉ (nei primi volumi degli Acta mathematica), i *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie* del KLEIN (nel vol. XXI dei Math. Ann.).

V.

Qui è opportuno mettere a riscontro delle ultime considerazioni quelle che si posson fare intorno all'uso del *metodo sintetico puro* nelle ricerche geometriche.

Nel progresso di un ente qual si sia, di un organismo vivente, come di una società, o di una scienza, si notano fra le altre due tendenze: l'una a formarsi differenze sempre più spiccate nella struttura e nelle funzioni delle varie parti, l'altra ad una connessione o dipendenza sempre maggiore fra queste [18]. Ne segue che il progredire delle scienze, mentre da un lato le moltiplica di numero, facendo di teorie che prima si confondevano in una sola scienza, tante scienze distinte, da un altro lato aumenta continuamente i legami fra queste ed i mutui aiuti che esse possono recarsi [19].

È così che fra i grandi progressi fatti dalle matematiche in questo secolo, accanto alle nuove rilevanti relazioni ed applicazioni stabilitesi fra esse ed in particolare fra l'analisi e la geometria, va segnalata la purificazione, per così dire, di queste scienze, cioè la formazione di una analisi che tutta si basa sulla sola nozione di numero, senza più esigere considerazioni geometriche (o meccaniche), e quella di una geometria projettiva che non si vale di coordinate ed anzi evita completamente i numeri nelle proprietà di posizione.

Questi indirizzi *puri* sono veramente della massima importanza. È in fatti fuor di dubbio che il matematico non può esser pienamente soddisfatto della conoscenza di una verità se non quando è riuscito a dedurla colla massima semplicità e naturalezza dal minor numero possibile di proposizioni note, di postulati indipendenti, evitando ogni ipotesi, ogni mezzo di dimostrazione che non appaia necessario per lo scopo. Così facendo si raggiungono spesso coi van-

---

(18) O, come dice lo SPENCER nella sua formola generale dell'*evoluzione* (*Primi principii*), questa fa passare l'ente da una omogeneità indefinita, incoerente, ad una eterogeneità definita, coerente.

(19) Di qui deriva la difficoltà più grave forse che incontri oggidì lo studioso: quella di conciliare la divisione del lavoro, resasi inevitabile pel grande sviluppo preso dalle scienze, con la necessità di seguire i progressi di parecchie fra queste, che tutte si collegano intimamente fra loro. Sventuratamente son pochi coloro a cui l'ingegno e le condizioni fisiche consentano di far ciò in modo pienamente soddisfacente. Chi è giovane adoperi tutte le sue forze per avvicinarsi quanto è possibile alla coltura scientifica di cui io parlo: sono gli studi fatti da giovane quelli che lasciano un'impressione più profonda nella mente!

taggi scientifici anche vantaggi didattici, in quanto che dallo studioso si esigerà minor copia di cognizioni preliminari. Oltre a ciò va notato come un fatto generale, che quando nelle ricerche si adopera un solo strumento, vietandosi espressamente l'uso di ogni altro, si è spesso condotti ad affinare ed a perfezionare quello usato, rendendolo così sempre più adatto a nuove scoperte. E fu per tal modo che il metodo sintetico, perfezionatosi nei grandi lavori con cui si formò la geometria moderna, riportò trionfi notevolissimi che dimostrarono appunto i vantaggi che spesso si hanno dall'uso prolungato di esso.

Ma in quest'ordine d'idee il giovane deve guardarsi bene dall'esagerazione. Il periodo, dirò così, eroico della geometria sintetica, nel quale non si trattava solo di dare alla scienza nuovi risultati, ma, da PONCELET a STEINER, da CHASLES a STAUDT, tutti dovevano combattere per dimostrare l'utilità del metodo geometrico agli analisti che non volevano riconoscerla, quel periodo è passato [20]; ed oggidì la lotta non è più necessaria. Che uno si occupi di stabilire per via sintetica dei risultati a cui già altri giunsero analiticamente è spesso una cosa utilissima, per le ragioni accennate or ora: ma il giovane deve scegliere per far ciò argomenti che presentino un'importanza particolare e notevoli difficoltà; e deve poi sempre, a parità di queste condizioni, dar la preferenza alla ricerca di verità completamente nuove, e non diventare un semplice traduttore di scritti analitici in sintetici. E nel fare una ricerca originale non si creda sempre obbligato di attenersi al metodo puramente geometrico: poichè infine alla scienza quel che più importa sono i risultati (ove non si tratti di creare metodi nuovi), e sarebbe follìa l'evitare certe questioni geometriche solo perchè nello stato attuale della scienza esse non si sanno trattare senza strumenti analitici. Crearsi *artificialmente* delle difficoltà, se giova ad aguzzare l'ingegno e può quindi esser qualche volta utile, non è però un procedimento da seguirsi in generale da chi ha per mira principale il progresso della scienza [21].

---

(20) E sembra giunto il momento opportuno per scriverne la storia! Dallo studio dei grandi geometri qualche giovane dovrebbe sentirsi spinto a ricercare ed a narrare in qual modo e per opera di chi si siano ottenuti i più importanti progressi della geometria moderna. Una storia particolareggiata di questi progressi costituirebbe un lavoro sommamente interessante!

(21) Ad esempio, dopo che lo STAUDT ci ha dato una teoria geometrica completa degli elementi imaginari, dimostrando come per essi valgano tutte le pro-

Per ogni ricerca si scelga liberamente il metodo che sembra più opportuno; spesso converrà alternare fra loro il metodo sintetico che appare più penetrante, più luminoso, e quello analitico che in molti casi è più potente, più generale, o più rigoroso; e parecchie volte accadrà pure che uno stesso argomento non sarà bene illuminato sotto ogni aspetto se non sarà trattato con ambo i metodi (22). Certamente anche qui le tendenze individuali si faranno sentire e uno stesso tema parrà più adatto alla trattazione sintetica agli uni, a quella analitica agli altri: così STEINER e CREMONA giungevano sinteticamente a certi risultati nello stesso tempo che SYLVESTER e CLEBSCH vi giungevano analiticamente! Ma quel che importa sovratutto è che il giovane non sia schiavo del metodo e che si metta in grado di valersi di qualunque strumento per giungere ad un risultato importante.

VI.

Allo stesso modo come, allorquando si tratta solo di scoprire una verità, la purezza del metodo passa in seconda linea, così accade spesso che in una prima ricerca si debba sacrificare (sacrifizio molto più grave, trattandosi di matematica!) il rigore (23). Soventi volte la verità scientifica appare come collocata su una vetta eccelsa e per raggiungerla non si hanno dapprima che sentieri malagevoli su chine pericolose, sì che vi è gran facilità di precipitare negli

---

prietà fondamentali della geometria projettiva, non vi è più ragione di volere, nelle ricerche scientifiche (non parlo di quelle essenzialmente didattiche) su questo campo, escludere l'uso degli elementi imaginari, e neppure di volerli introdurre solo a *coppie* (di elementi imaginari coniugati). S'intende che qui, come sempre, parlo in massima generale, ammettendo le debite eccezioni.

(22) È perciò che, nello stato attuale della scienza, mi sembrano *in generale* preferibili quei trattati (o quei corsi) in cui un argomento è svolto con varietà di metodi a quelli in cui si adopera un metodo unico: così le curve, superficie, ecc., algebriche mi pare opportuno siano spiegate ai giovani tanto analiticamente quanto sinteticamente, alternando in generale i due metodi a seconda delle questioni.

(23) Non si confonda la deficienza di rigore nei procedimenti con l'errore nei ragionamenti o nei risultati. Purtroppo anche l'errore s'incontra assai spesso oggidì nei lavori scientifici ed è causato generalmente dalla fretta con cui questi son fatti: sicchè convien raccomandare ai giovani di non avere soverchia fretta di pubblicare le loro cose! Ma la questione del rigore, di cui sopra discorro, è ben diversa.

abissi in cui sta l'errore: soltanto dopo che alla vetta si è giunti per siffatti sentieri, si riesce a tracciare delle strade sicure che conducano ad essa senza pericoli. Così è avvenuto frequentemente che il primo modo di giungere ad una verità non sia stato pienamente soddisfacente, e che solo *dopo* la scienza sia riuscita a completarne la dimostrazione. Certamente anche qui il matematico non potrà essere veramente contento quando ad un nuovo risultato sia giunto con procedimenti poco rigorosi: egli non si considererà come sicuro di quello finchè non l'avrà rigorosamente dimostrato. Ma non rigetterà senz'altro quei procedimenti incompleti nelle ricerche difficili in cui non possa sostituirli meglio: poichè la storia della scienza lo ammaestra appunto sull'utilità che tali metodi hanno sempre avuto.

Ad esempio l'introduzione degli elementi imaginari e di quelli all'infinito in Geometria riuscì utilissima anche prima che essa fosse giustificata con una logica perfetta. E PONCELET, che insegnò a valersi con grande vantaggio del principio di continuità per le proprietà delle figure geometriche, non riuscì certo a stabilirlo in modo rigoroso, malgrado le molte pagine che scrisse per questo scopo (24). Similmente in varie ricerche, specialmente sintetiche, sulle curve e le superficie, si è approfittato molto di considerazioni su punti infinitamente vicini, o consecutivi, sulle tangenti, sui punti r-pli come intersezioni di r rami o falde, ecc. ecc., le quali erano ben lungi dall'essere rigorose, almeno in generale e nel modo com'erano presentate. Lo stesso si può dire di parecchi procedimenti della *geometria numerativa* (25) (ai quali si posson collegare gli ultimi esempi

---

(24) V. specialmente le *Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques* nel 2º volume delle *Applications d'Analyse et de Géométrie*; ed il *Traité des propriétés projectives des figures*. Dall'introduzione di questo trattato riporto il seguente brano che si collega a quanto sopra diciamo:

« N'est-il pas, pour le moins, aussi nécessaire d'enseigner les ressources employées, à diverses époques, par les hommes de génie, pour parvenir à la vérité, que les efforts pénibles qu'ils ont été ensuite obligés de faire pour les démontrer selon le goût des esprits ou timides ou peu capables de se mettre à leur portée ?

« Enfin, quel mal pourrait-il en résulter, surtout si l'on se montrait sévère à conclure, si l'on ne se payait jamais de demi-aperçus, si l'on n'admettait jamais l'*analogie* et l'*induction*, qui sont souvent trompeuses ... » ?

(25) V. l'opera importantissima dello SCHUBERT: *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, 1879), in cui questi procedimenti sono riuniti ed adoperati sistematicamente.

citati), come il principio dell'enumerazione delle costanti, e specialmente quello dell'invariabilità del numero, nelle cui applicazioni si ammette spesso, senza una dimostrazione completa, che il numero cercato dipenda solo da certi altri, e però non muti (o diventi infinito) se questi non mutano: metodi che hanno condotto valenti scienziati, come il JONQUIÈRES [26], lo SCHUBERT ed altri, a risultati splendidi, fra cui molti ai quali la scienza attualmente ancora non saprebbe giungere per una via più rigorosa [27]. Infine ricorderò che talvolta si è persino avuto ricorso a disegni o modelli di figure geometriche per *vedere* certe proprietà (specialmente di forma o di realtà) che col solo ragionamento deduttivo non si sapevano ottenere [28].

Ora nel fare uso di simili mezzi d'investigazione il giovane deve badare che qui, come nelle salite difficili su erte pericolose, per non cadere nell'abisso o nell'errore ci vuol destrezza, prudenza e pratica. E dopo essersi valso colla massima cautela di quei mezzi per le sue scoperte deve cercare se non gli riesce di sostituirli con dimostrazioni sicure. Ma, come già dissi, io non credo che egli debba rinunziare ad occuparsi di una ricerca o ad esporre un suo risultato, perciò solo che egli non può procedere con metodi perfettamente rigorosi. La massima prudenza, ripeto ancora, il massimo numero di controlli, ecc. ecc., ci vogliono per non cadere nell'errore; anche in ciò gioverà l'esempio degli scienziati di valore, per insegnare quando è che nel risultato ottenuto si può aver fiducia: ma allora sarà opportuno farlo conoscere. Solo bisognerà alla prudenza congiungere l'*onestà*, cioè avvertire espressamente come la via tenuta non sia scevra di dubbi, affinchè nessuno sia indotto a fidarsi ciecamente

---

[26] V. per esempio la determinazione del numero dei gruppi, di una serie lineare di gruppi di punti di una curva, i quali hanno dei punti con date multiplicità: determinazione contenuta in sostanza nel *Mémoire sur les contacts multiples des courbes de degré* r, *qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe etc.*, del DE JONQUIÈRES, Crelle's Journal, 66, 1866.

[27] Rivolgendomi a giovani, mi piace citare fra i più importanti risultati così raggiunti quello ottenuto recentemente da un giovane, cioè il numero delle serie lineari di dati indici sopra una curva di dato genere (v. due Note del CASTELNUOVO nei Rend. Acc. Lincei, estate 1889).

[28] E vi sono altri casi in cui a risultati spettanti alla matematica si giunse valendosi della fisica. Anche ciò è permesso: s'intende in questo senso, che il risultato così conseguito, pur essendo ancora *scientifico* (fisico), non sarà però *matematico*, non avrà che un valore relativo ed approssimato; ma preparerà la via al risultato matematico, cioè a quello che sarà stabilito con una completa deduzione matematica.

del risultato, ma anzi vi sia un invito a cercarne una più completa dimostrazione (29).

VII.

Abbiamo accennato fin dal principio di queste considerazioni, valendoci anche delle parole di CHASLES, sì all'estensione ed all'importanza capitale che nella geometria delle varietà algebriche hanno le corrispondenze o trasformazioni algebriche, sì ancora alla facilità con cui mediante queste si ottengono dei nuovi enti e delle nuove proposizioni.

Quanto all'importanza, la si può considerare specialmente sotto tre diversi aspetti, corrispondentemente ai tre seguenti uffici delle corrispondenze stesse: 1⁰ quello di caratterizzare certi indirizzi geometrici (30): così si ha una geometria projettiva, in cui il gruppo di trasformazioni posto a base è quello costituito dalle projettività; una geometria delle trasformazioni birazionali od univoche, cioè la geometria delle trasformazioni birazionali del piano o dello spazio ecc., la geometria *sulla curva* (che mediante considerazioni funzionali si rispecchia nella geometria delle trasformazioni conformi delle superficie), la geometria *sulla superficie*, ecc., 2⁰ trasformare enti di cui son note le proprietà in enti di cui si vengono così ad avere nuove proprietà, 3⁰ generare nuove varietà, valendosi di corrispondenze algebriche fra date forme, come luoghi degli elementi uniti, ovvero luoghi delle intersezioni o delle congiungenti di elementi omologhi, ecc. ecc.

Il 2⁰ di questi scopi è suggerito dal 1⁰, allorquando volendo studiare le proprietà di un ente secondo un certo indirizzo, cioè le

(29) Fra le trascuranze che spesso si devon fare in una prima scoperta di nuovi fatti va rilevata ancora quella dei casi d'eccezione. Accade frequentemente di dire che una proposizione è vera *in generale,* senza spiegare che cosa s'intenda con ciò, quali siano le *eccezioni*. Naturalmente anche qui viene a mancare quella esattezza che è il più gran pregio della matematica. Nella geometria degli enti algebrici si può dare un significato abbastanza preciso alla locuzione « *in generale* »: s'intende allora che le *eccezioni* hanno luogo solo per quegli enti le cui coordinate (o parametri da cui essi dipendono algebricamente) soddisfano a certe equazioni algebriche non identiche. Se si possono assegnare precisamente queste equazioni, cioè le condizioni che caratterizzano i casi eccezionali, si sarà raggiunto completamente lo scopo del matematico. Ma sovente avviene di doversi accontentare di quell'affermazione generica.

(30) V. il Programma già citato del KLEIN.

proprietà che non mutano per una certa classe di trasformazioni geometriche, si applicano queste a semplificare l'ente sì da renderne più facile lo studio. Ciò si fa, a mo' d'esempio, nel metodo della projezione centrale usato in geometria projettiva; o quando per studiare la geometria su una curva si adoperano certe curve *normali*; o quando le proprietà dei sistemi lineari di curve di un piano (nella geometria delle trasformazioni birazionali del piano) si deducono da quelle dei sistemi lineari d'ordine minimo. Però se si confronta il *Traité des propriétés projectives des figures* del PONCELET coi trattati posteriori, ad esempio colla *Geometrie der Lage* dello STAUDT ([31]), si vede come l'importanza di quel metodo di dimostrazione nella Geometria projettiva sia diminuita, e come si sia preferito di studiare direttamente l'ente anzi che studiarne prima un caso particolare per poi dedurne quello generale con trasformazioni projettive. E qualche cosa d'analogo si può già notare anche per certe questioni di geometria delle trasformazioni univoche, ecc.

Ciò non significa punto che le trasformazioni perdano in qualche guisa importanza: lungi da ciò! È solo il modo di applicarle che muta. Certo che, per esempio, lo studio di *particolari* curve e superficie razionali mediante la rappresentazione parametrica, ossia la rappresentazione sulla retta o sul piano, e così pure lo studio di *particolari* corrispondenze univoche fra due piani o due spazi, non hanno più attualmente quell'interesse che avevano una ventina d'anni fa. Allora essi conducevano a considerare nuovi enti e nuovi problemi interessantissimi, ed i migliori geometri vi si rivolgevano con frutto. Oggidì il moltiplicare le applicazioni dei metodi che allora furono escogitati ha in generale un'importanza secondaria, a meno che si tratti di casi eccezionali presentanti nuove difficoltà. Dato il sistema lineare di curve piane rappresentativo di una superficie, o dato il sistema omaloidico di curve o superficie che definisce una trasformazione birazionale del piano o dello spazio, ecc., non è più in molti casi che un semplice esercizio da scuola il dedurne le proprietà della superficie o della trasformazione birazionale, ecc. E così in generale, com'è facile immaginare dei nuovi luoghi e delle nuove trasformazioni geometriche, altrettanto è facile inventare delle applicazioni delle corrispondenze per ottenere nuove verità. Si prende un punto A, lo si congiunge con B, si prende la polare rispetto a C, s'interseca con D, si determina l'omologo rispetto ad E,

---

([31]) Tradotta in italiano dal PIERI (Torino, Bocca, 1889).

ecc. ecc., ed infine da A si sarà ottenuto un punto (od altro elemento) A': ai tali elementi corrisponderanno così i tali altri, e se A od A' si muove nel tal modo, A' od A si muoverà pure, ecc. ecc. In questa guisa un dato ente, o una data proprietà, si trasformerà in un altro, che ne darà un terzo, e così via; e tutto ciò senz'alcuna difficoltà, quasi meccanicamente, colla regolarità con cui un pendolo fa le sue oscillazioni (32).

Ora, anche rimanendo nel campo delle corrispondenze algebriche, non è di questa specie di ricerche che conviene principalmente occuparsi oggidì. Ben altre questioni vi sono di maggior momento! La teoria delle trasformazioni birazionali dello spazio aspetta che qualcuno affronti certi problemi generali e d'importanza capitale, i cui analoghi pel piano furon già risolti. Essa aspetta di essere applicata alla grave questione della riduzione delle singolarità superiori delle curve sghembe e delle superficie, non che allo studio dei sistemi lineari di superficie, ecc. È ancora da farsi la teoria delle corrispondenze multiple fra due piani o fra due spazi. Lo studio delle corrispondenze algebriche fra curve (distinte o sovrapposte) è lungi dall'essere completo. E quello delle corrispondenze fra due superficie si può dire (malgrado un recente lavoro di un valente matematico francese) che è ancora da cominciare. In tutti questi campi si trovano delle questioni vitalissime alle quali deve rivolgersi il giovane molto più che alle esercitazioni dianzi citate.

Anche nell'applicazione delle corrispondenze algebriche alla generazione di luoghi geometrici si son trovati e si posson ancora trovare risultati importanti. Ma bisogna che quelle corrispondenze siano scelte in modo da condurre a luoghi interessanti o per la loro generalità o per circostanze speciali. Si badi inoltre che spesso la determinazione dei vari caratteri (ordine, classe, punti multipli, ecc.) degli enti così generati non presenta novità o difficoltà alcuna, poichè si ottiene con procedimenti enumerativi notissimi. La ricerca non deve dunque ridursi solo a tale determinazione; ma deve comprendere l'esame di tutte le particolarità dei luoghi ottenuti, fino a risolvere la questione inversa, cioè a stabilire quali sono tutti gli enti generabili a quel modo.

---

(32) Onde un mio maestro (dal quale io stesso ho ricevuto parecchi dei consigli che ora rivolgo ai miei studenti) soleva caratterizzare scherzosamente questo genere di ricerche col nome di *tic-tac-geometria*.

VIII.

Accanto all'estensione che alla Geometria moderna fu data dall'uso delle trasformazioni abbiamo già collocata quella che derivò dall'allargarsi del suo campo col considerare classi sempre più vaste di enti. A ciò si può connettere la comparsa della geometria degl'iperspazi, grazie a cui si sono allontanati indefinitamente i confini della scienza geometrica. Di questo campo è opportuno dire qui qualche cosa, sia perchè nell'ultimo decennio, specialmente dopo la Memoria, ormai celebre, del VERONESE (33), si son rivolti ad esso con molti lavori parecchi geometri italiani (34) e con preferenza i più giovani, sia perchè, malgrado ciò, accade tuttora, anche in Italia, che non si sappia collocare la geometria ad n dimensioni al suo giusto posto (35).

---

(33) *Behandlung der proj. Verhältnisse* u. s. w., Math. Ann., XIX.

(34) Se ne può contare almeno una ventina!

(35) Per completare quanto dirò in proposito ed appoggiarlo con una voce autorevole, riporto qui testualmente la 4a Nota (*Ueber Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen*) del citato Programma di KLEIN.

« Dass der Raum, als Ort für Puncte aufgefasst, nur drei Dimensionen hat, braucht vom mathematischen Standpuncte aus nicht discutirt zu werden; ebenso wenig kann man aber vom mathematischen Standpuncte aus Jemanden hindern, zu behaupten, der Raum habe eigentlich vier, oder unbegränzt viele Dimensionen, wir seien aber nur im Stande, drei wahrzunehmen. Die Theorie der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, wie sie je länger je mehr in den Vordergrund neuerer mathematischer Forschung tritt, ist, ihrem Wesen nach, von einer solchen Behauptung vollkommen unabhängig. Es hat sich in ihr aber eine Redeweise eingebürgert, die allerdings dieser Vorstellung entflossen ist. Man spricht, statt von den individuen einer Mannigfaltigkeit, von den Puncten eines höheren Raumes etc. An und für sich hat diese Redeweise manches Gute, insofern sie durch Erinnern an die geometrischen Anschauungen das Verständniss erleichtert. Sie hat aber die nachtheilige Folge gehabt, dass in ausgedehnten Kreisen die Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen als solidarisch erachtet werden mit der erwähnten Vorstellung von der Beschaffenheit des Raumes. Nichts ist grundloser als diese Auffassung. Die betr. mathematischen Untersuchungen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, aber ihr Werth und ihre Absicht ruht, gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.

« Etwas ganz anders ist es, wenn PLÜCKER gelehrt hat, den wirklichen Raum als eine Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen aufzufassen, indem man als Element des Raumes ein von beliebig vielen Parametern abhängendes Gebilde (Curve, Fläche, etc.) einführt.

« Die Vorstellungsweise, welche das Element der beliebig ausgedehnten

Si posson distinguere tre modi sotto cui si son presentati gli iperspazi ai geometri; e ad essi corrispondono altrettante maniere di definire i punti di uno spazio lineare ad n dimensioni. Anzitutto, se, in base al metodo delle coordinate, si considerano i punti della retta, del piano o dello spazio come rappresentanti delle varietà analitiche composte da tutti i valori possibili di un numero, o di due numeri, o di tre, sicchè i sistemi di equazioni ad una, due, o tre variabili vengono rappresentati da aggruppamenti di punti, ecc. ecc., si è condotti naturalmente ad estendere il linguaggio geometrico al caso di un numero qualunque n di variabili, chiamando ancora *punto* un gruppo qualunque di valori (*coordinate* del punto) di n variabili, *spazio* (ad n dimensioni) l'insieme di tutti questi punti o gruppi di valori, *curva* o *superficie* la varietà costituita dai punti le cui coordinate sono date funzioni (colle debite restrizioni) di uno o due parametri (*retta* o *piano* nel caso che siano funzioni lineari fratte collo stesso denominatore), ecc. ecc. Tale estensione si è presentata come una necessità in un gran numero di ricerche ([36]), sia per dar loro la massima generalità, sia per conservare in esse il carattere intuitivo proprio della geometria. Ma è stato osservato che con ciò non si viene più a fare della vera geometria, poichè gli enti considerati sono essenzialmente analitici; e che ad esempio la geometria projettiva generale che così si viene a costruire non è altro in sostanza che l'algebra delle trasformazioni lineari ([37]).

Mannigfaltigkeit als ein Analogon zum Puncte des Raumes betrachtet, ist wohl zuerst von GRASSMANN in seiner Ausdehnungslehre (1844) entwickelt worden. Bei ihm ist der Gedanke völlig frei von der erwähnten Vorstellung von der Natur des Raumes; letztere geht auf gelegentliche Bemerkungen von GAUSS zurück und wurde durch RIEMANN's Untersuchungen über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, in welche sie mit eingeflochten ist, in weiteren Kreisen bekannt.

« Beide Auffassungsweisen — die GRASSMANN'sche wie die PLÜCKER'sche — haben ihre eigenthümlichen Vorzüge; man verwendet sie beide, zwischen ihnen abwechselnd, mit Vortheil ».

([36]) Cito solo come esempi le ricerche sugli ordini di sistemi di equazioni algebriche (varietà algebriche di uno spazio qualunque) del SALMON (*Geometria a tre dimensioni* e *Algebra moderna*), il lavoro del NÖTHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen* (Math. Ann., II, 1869), e la Memoria di CLEBSCH, *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Gött. Abhandlungen, 17, 1872), rimandando per altre citazioni alla Monografia storica di LORIA.

([37]) Questa è una distinzione, non un appunto. Purchè si faccia della *matematica*!

Un modo geometrico di giungere agl'iperspazi si ha seguendo il concetto di PLÜCKER di considerare quali elementi (*punti*) di una varietà (di uno *spazio*) enti geometrici dello spazio ordinario, come gruppi di punti, curve, superficie, ... i quali dipendano da un numero qualsiasi di parametri. È così che le rette dello spazio ordinario si posson considerare, seguendo PLÜCKER, come i *punti* di uno spazio a 4 dimensioni. Però se si vogliono in questa rappresentazione evitare gli elementi eccezionali, se si vuol cioè rappresentare *linearmente* una varietà ∞^n di enti geometrici ordinari coi punti di un iperspazio (lineare), conviene che quella varietà sia lineare. Così un'involuzione di specie n e di qualunque ordine di punti di una retta (ad esempio quella composta di tutti i gruppi di n punti), un sistema lineare ∞^n di curve piane o di superficie, o di connessi, ecc. ecc., è da questo punto di vista uno spazio (lineare) ad n dimensioni, sicchè le varietà contenute in questo non sono che varietà parziali di quell'involuzione o di quel sistema lineare. Questo modo di rappresentazione si è offerto spontaneamente ai geometri che hanno voluto approfondire le questioni sui sistemi infiniti di curve piane (o di superficie) ([38]). È chiaro che stando a questo modo di concepirla, la geometria degl'iperspazi non presenta più alcuna novità di concetto: essa rientra nella geometria ordinaria, occupandosi delle varietà di enti che in questa compaiono.

Infine si può riguardare lo spazio ad n dimensioni come definito al modo stesso di quello ordinario, solo che si tolga il postulato delle 3 dimensioni, e si modifichino in conseguenza alcuni di quelli

---

([38]) Così se ne valse il CAYLEY nel 1° paragrafo della Memoria *On the Curves wich satisfy given Conditions* (Phil. Trans., 158, 1867); e su esso ritornò in *A Memoir on Abstract Geometry* (ibid., 160, 1869), nel quale, rilevando l'importanza che dovrebbe avere la *geometria astratta*, cioè ad n dimensioni, osserva: « The science presents itself in two ways, — as a legitimate extension of the ordinary two — and three — dimensional geometries; and as a need in these geometries and in analysis generally ». Lo stesso concetto di applicazione degl'iperspazi ai sistemi infiniti di curve piane (o di superficie) è esposto chiaramente con qualche esempio dallo HALPHEN alla fine delle *Recherches de géométrie à* n *dimensions* (Bull. Soc. math. de France, II, 1873); si ritrova poi nella Memoria di CLIFFORD, *On the Classification of Loci* (Phil. Trans., 169, 1878) (nella quale i *punti* degl'iperspazi son definiti ed interpretati nelle applicazioni, come elementi di qualsiasi natura, curve, superficie, complessi, ecc.) ed in parecchi altri lavori recenti, ad es. in quello di STUDY, *Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem* (Math. Ann., XXVII).

relativi alla retta ed al piano [39]. Allora i *punti* dell'iperspazio sono i punti tali quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario, e non più enti puramente analitici, od enti geometrici di qualunque natura [40]. A questo concetto son giunti specialmente coloro che hanno discussi i fondamenti della geometria, cercando quali postulati della scienza ordinaria si posson togliere senza troppi inconvenienti. E fu esso appunto che venne spesso confuso colla questione (fisica o filosofica, ma non matematica) del numero delle dimensioni che lo spazio ordinario (fisico) ha *effettivamente* (v. le parole del KLEIN dianzi citate in nota).

In ognuno di questi modi di considerare gli spazi lineari in geometria vi è qualche vantaggio; e si può specialmente notare che il 1° è molto generale e molto semplice, ma analitico, mentre il 3° è geometrico e pienamente intuitivo, ed il 2° è quello che più immediatamente si presta alle più numerose applicazioni per lo spazio ordinario. Ma la distinzione di questi modi non corrisponde poi a trattazioni diverse della geometria (projettiva) a n dimensioni. Anzi pel matematico essa non ha una vera importanza. Egli può evitare di farla e lavorare negl'iperspazi senza fissare quale sia tra le varie definizioni quella che egli sceglie; e può a dirittura tenerle tutte, per avere maggior quantità di rappresentazioni e d'interpretazioni dei risultati.

IX.

Da ciò che s'è detto risulta evidente che la geometria ad n dimensioni non ha caratteri matematici essenzialmente diversi da quelli della geometria ordinaria. Gli spazi a 4, 5, ... dimensioni, quali

---

(39) Non è ancora stato assegnato e discusso (ch'io sappia) un sistema di postulati *indipendenti* che serva a caratterizzare lo spazio lineare ad n dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questo con coordinate. Sarebbe conveniente che qualche giovane si occupasse di questa quistione (che non sembra difficile).

(40) V. VERONESE, Mem. citata, e *La superficie omaloide normale,* ecc. (Mem. Acc. Lincei, (3) 19), nota a pie' della 2ª e 3ª pagina. L'ipotesi fondamentale (che ivi appunto è enunciata) per questo modo di procedere, cioè che fuori della retta, del piano, dello spazio ordinario, ... ci sian sempre dei punti (che, congiunti a spazi non passanti per essi, dànno gli spazi superiori), è permessa al matematico, poichè essa non contraddice a postulati precedenti (ove nei postulati ordinari si sian fatte le modificazioni sopra accennate).

noi li abbiamo definiti, esistono pel matematico precisamente a quel modo che esiste lo spazio a 3 dimensioni; ed egli li può studiare con gli stessi procedimenti. Così una varietà algebrica M_k (d'ordine m) appartenente ad S_n è un ente, analitico o geometrico, esistente allo stesso modo che esistono le n funzioni algebriche di k parametri indipendenti da cui essa è definita, oppure un sistema algebrico ∞^k (d'indice m) di curve piane o superficie ... entro un sistema lineare ∞^n, ecc. ecc. Sarebbe poi assurdo il dire che gli enti degl'iperspazi hanno minor importanza (matematica) che quelli dello spazio ordinario: si può egli affermare che sia più importante la geometria piana che la solida? o che la teoria delle funzioni di una o di due variabili sia più importante che quella delle funzioni di un numero qualunque n di variabili? o che lo studio di una ∞^3 di enti sia di maggior momento che quello di una varietà comunque infinita, ∞^n?

Naturalmente non diremo neppure che una ricerca *pel solo fatto che si riferisce agl'iperspazi* sia più importante [41] che una ricerca relativa allo spazio ordinario! Il paragone è solo possibile quando la prima ricerca si riduce alla seconda, per $n = 3$; ed allora non v'è dubbio che alla maggior generalità corrisponderà la maggior importanza. Ma se si paragona invece il complesso di *tutta* la geometria ad n dimensioni a *tutta* la geometria ordinaria, si può dire, sì, che questa è compresa come caso particolare in quella; ma conviene aggiungere che tutte le proposizioni di quella devon pure trovarsi in sostanza nella geometria ordinaria, come proprietà relative ai sistemi ∞^n di enti geometrici ordinari.

Qui, alle osservazioni su vari indirizzi di ricerche che dapprima abbiam riferito solo alla geometria ordinaria, ma che vanno estese senz'altro a quella ad n dimensioni, è opportuno aggiungere una distinzione che naturalmente si presenta fra le ricerche a cui ha condotto l'introduzione degl'iperspazi. Nella serie infinita di nuovi enti e di nuovi problemi da studiare che da tale introduzione fu messa in evidenza, se ne trovano parecchi derivati per analogia e generalizzazione da quelli relativi allo spazio ordinario, altri invece provenienti da concetti che in questo non si potevano avere. E così s'incontrano delle ricerche relativamente facili da fare perchè in esse la detta analogia collo spazio ordinario guida subito alla generaliz-

---

[41] Nè più difficile. L'esperienza prova che, specialmente pei giovani, è assai facile abituarsi alle costruzioni ed ai ragionamenti della geometria ad n dimensioni.

zazione dei metodi usati in questo e dei risultati ivi ottenuti; ma anche delle ricerche in cui si hanno difficoltà veramente nuove. Perchè l'edifizio (che appena s'è cominciato a costruire) venga ad essere completo occorrono e le une e le altre ricerche. In conseguenza errano coloro che ritengono la geometria degli iperspazi consistere tutta in una pura estensione, facile a farsi, della geometria ordinaria: come se similmente tutta la geometria dello spazio ordinario non fosse a sua volta che una semplice e facile generalizzazione di quella piana! Ed hanno torto quei giovani che si limitano espressamente (per evitare difficoltà!) al primo genere di ricerche: ed è così facendo che essi inducono quell'opinione errata nei loro lettori! Certo che grazie agl'iperspazi coloro che amano gli argomenti facili li hanno visti aumentar di numero in modo straordinario! quante nuove generalizzazioni non si son così avute da fare, così facili che si possono enunciare senz'altro! quanti nuovi enti particolari non si sono avuti da costruire! quante trasformazioni particolari, quante projezioni in spazi inferiori (42) da far subire ad essi! Ma anche qui dèbbo ripetere che, se non si può rigettare senz'altro un argomento solo perchè è facile, non bisogna neppure lasciarsi sedurre unicamente dalla facilità, e si deve badare che ogni problema che si prende a trattare, facile o difficile ch'ei sia, abbia però sempre uno scopo utile, contribuisca in qualche modo ad elevare il grande edifizio, non sia uno di quei semplici esercizi, di quelle inutili generalizzazioni, che è tanto facile immaginare ed eseguire, e che, come non potranno mai entrare nella scienza, così non meriteranno mai lodi sincere!

X.

Lo spazio illimitato, senz'alcun vincolo al numero di dimensioni, è l'ambiente in cui oramai si debbono considerare le forme geometriche. Così facendo, oltre ad ottenere il grande vantaggio della massima generalità, si ha quello di togliere gli ostacoli che fino a poco tempo fa vietavano al geometra che conosceva l'utilità di certe considerazioni stereometriche per la geometria piana, di cercare in uno spazio superiore analoghe applicazioni allo spazio ordinario (43). Negl'iperspazi

(42) E spesso evitando anche qui il *problema inverso,* di vedere cioè quando l'ente dello spazio inferiore si può veramente riguardare come projezione di quello dello spazio superiore!

(43) Del resto (è bene ripeterlo) l'importanza scientifica della geometria degl'iperspazi sussisterebbe perfettamente anche senza queste applicazioni.

non si hanno limiti; ogni spazio è contenuto in uno superiore: ed in questo si posson cercare degli enti che semplifichino lo studio di enti dati in quello, producendoli come projezioni, o come sezioni, o come contorni apparenti, ecc. In ciò si ha una delle principali applicazioni della geometria degl'iperspazi a quella dello spazio ordinario [44]: ma non la sola. Già si vede dalla seconda definizione data degli spazi superiori che tutti i risultati relativi a questi si possono tradurre in mille guise in proposizioni geometriche ordinarie, fissando quali enti geometrici dello spazio ordinario si debbon porre in luogo dei punti dell'iperspazio [45]. Inoltre bisogna spesso rivol-

---

[44] Pare che il primo esempio di siffatte applicazioni sia dovuto al CAYLEY, il quale nella Nota *Sur quelques théorèmes de la géométrie de position* (Crelle's Journal, 31, 1845, p. 218) osserva come certe configurazioni dello spazio ordinario o del piano si ottengano quali sezioni della configurazione determinata da un numero qualsiasi di punti di un iperspazio qualunque. Dopo, altre ne furon notate da altri; ma il lavoro che per l'uso della projezione dagli spazi superiori su quello ordinario ha veramente fatto epoca è stato quello del VERONESE.

A questo metodo è stata mossa la seguente obbiezione. Se un ente dello spazio ordinario si studia considerandolo come projezione di uno appartenente ad uno spazio superiore, s'introduce così nei ragionamenti un nuovo postulato — l'esistenza di punti fuori dello spazio ordinario, — e quindi i risultati che si otterranno non avranno esattamente quel valore che avrebbero se provenissero da ragionamenti fatti senza uscire dallo spazio ordinario e dai relativi postulati. Quest'obbiezione, che appare legittima se degl'iperspazi si dà quella definizione che qui fu accennata come 3ª, si toglie invece se si ricorre alle altre due. Si consideri una rappresentazione dei punti ordinari sopra una varietà ∞^3 costituita o dai gruppi di valori di 3 numeri, o da opportuni enti geometrici ordinari (ad es. una rappresentazione sui gruppi di un'involuzione di grado n e di 3ª specie di punti di una retta). Questa varietà ∞^3 si può, *senza nuovi postulati*, introdurre e riguardare come contenuta in una (analitica o geometrica) ∞^n, alla quale si potranno riferire i ragionamenti iperspaziali: dopo di che si ritornerà allo spazio ordinario mediante la rappresentazione della ∞^3 su questo. In particolare si può ad esempio, aggiungendo a tutti i punti dello spazio, considerati come inviluppi di piani, un inviluppo fisso di classe $m-1$, mutarli in inviluppi di classe m; e così si ha un sistema lineare ∞^3 d'inviluppi, che, prendendo m opportunamente, si può sempre considerare come contenuto in un sistema lineare ∞^n: ed allora si può prender questo come rappresentante dell'iperspazio S_n adoperato nei ragionamenti. Le projezioni e sezioni che per semplicità e brevità di discorso si riferiscono ai punti di un S_n, si potrebbero invece tradurre immediatamente come costruzioni relative agl'inviluppi di quel sistema lineare, e si giungerebbe così agli stessi risultati per lo spazio ordinario.

[45] Solo a chi non conosce questa multiplicità d'interpretazioni di cui è suscettibile la geometria degl'iperspazi, può accadere di sbagliare in certe questioni semplicissime sui sistemi ∞^1 di curve piane o di superficie, d'indice m, le

gersi a spazi superiori per avere le più adatte rappresentazioni di certe specie di varietà. Così lo studio di un sistema lineare di curve di un piano o di superficie dello spazio ordinario (dal punto di vista delle trasformazioni birazionali) trova una comoda imagine in quello (projettivo) della superficie o varietà che ne è rappresentata. Per la geometria sull'ente algebrico semplice di genere p, e in particolare per lo studio delle serie lineari di gruppi sull'ente stesso si ricorre con vantaggio a certe curve dei vari spazi le quali rappresentano quelle serie lineari, e particolarmente alla curva normale d'ordine $2p - 2$ appartenente allo spazio S_{p-1} (46). Una cosa analoga si potrà dire per la geometria su una superficie, e più in generale per la geometria su una varietà algebrica qualunque (47). Qui poi l'uso degl'iperspazi sarà necessario anche per rappresentare con un campo reale la distribuzione dei punti, reali e imaginari, della superficie (o varietà), cioè dei valori di una funzione algebrica di *due* (o più) variabili: a quel modo che per la geometria sulla curva, ossia per le funzioni algebriche di *una* variabile, si è avuto ricorso alle superficie di RIEMANN. Le ricerche sulla *Analysis situs* negl'iperspazi troveranno così applicazioni della massima importanza nella geometria sugli enti algebrici, cioè nella teoria delle funzioni algebriche di due o più variabili.

A questo modo, valendosi dall'un lato dei metodi di trasformazione della geometria moderna, delle considerazioni più generali sugl'iperspazi, ecc., e dall'altro dei concetti dovuti all'Analisi, gli enti che si considerano vengono a presentarsi sotto una varietà siffatta di

---

quali son risolte implicitamente da teoremi notissimi sulle curve d'ordine m degl'iperspazi; o di riguardare come nuova la determinazione delle rigate di dato grado e del massimo genere, quando invece essa si può considerare come contenuta nella determinazione delle curve (della M_4^2 di rette) di dato ordine e di genere massimo!

(46) A questo proposito mi piace rilevare che nelle recenti *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* del KLEIN (e FRICKE) (I. Band, Leipzig, 1890; v. il III. Abschnitt) la rappresentazione geometrica dell'ente algebrico semplice e della teoria delle funzioni algebriche e dei loro integrali, e quindi delle serie lineari di gruppi, ecc. ecc., è data appunto mediante curve di tutti gli spazi (anzi che colla sola curva piana, come dai più si usa di fare).

(47) Della geometria sopra una varietà algebrica, curva, superficie, ecc., ho fatto cenno ripetutamente, perchè su essa mi piace richiamare l'attenzione dei giovani: si tratta in fatti di un argomento d'importanza capitale per tutta la matematica — l'analisi come la geometria, — e sarebbe bene che molti vi rivolgessero le loro forze!

aspetti e di punti di vista, ed a potersi trasformare in mille maniere, sì che, mentre si accrescono grandemente i mezzi di studiarli, diventano in pari tempo molto superiori l'interesse e l'importanza delle ricerche e vengono a congiungersi con un'eleganza ed una leggiadrìa singolari. Così l'ente algebrico ∞^1 (*algebraische Gebilde*) di genere p viene a rappresentarsi con una curva algebrica di qualunque spazio, o con una rigata, o con un sistema ∞^1 di curve o superficie, ecc.; o con una classe di funzioni algebriche o di funzioni abeliane, o con un sistema di funzioni fuchsiane; o con una superficie di RIEMANN, con una sfera dotata di p manichi o di p buchi, con un poligono piano curvilineo generatore di un gruppo fuchsiano [48], ecc. ecc.: e tutti questi enti si equivalgono; per trasformazioni geometriche od analitiche, per deformazioni continue, per rappresentazioni conformi, si mutano gli uni negli altri; e da tutti lo studio dell'ente algebrico può trarre aiuti!

I giovani che, seguendo questi indirizzi, riusciranno nel miglior modo a possedere i diversi strumenti di ricerca e ad abbracciare da tutti i possibili punti di vista la scienza, avranno da questa i più splendidi trionfi!

Torino, Febbraio 1891.

---

(48) In particolare per l'ente ellittico ($p = 1$): l'anello, il parallelogrammo, la corrispondenza (2, 2) fra due variabili, ecc.